HISTORIA MATHEMATICA **12** (1985), 203–218

Peirce e Dedekind: La Definizione di Insieme Finito

FRANCESCO GANA

via Taro 46, 00199 Rome, Italy

Starting from Peirce's repeated claims of priority with respect to Dedekind's definition of finite set [R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Braunschweig: Vieweg, 1888), Definizione 64], this paper traces the history of Peirce's definition and its role in his research on the foundations of arithmetic. This brings to light some remarkable and neglected achievements of Peirce in this field. It also shows that his priority claims are unjustified, although understandable in terms of his desire for acknowledgment of his pioneering work on the foundations of arithmetic. © 1985 Academic Press, Inc.

Cet article relate l'histoire de la définition d'ensemble fine donnée par Peirce et de son rôle dans les recherches de ce dernier sur les fondements de l'arithmétique. Il débute par les revendications répétées de Peirce quant à l'antériorité de la définition d'ensemble fini de R. Dedekind [*Was sind und was sollen die Zahlen?* (Braunschweig: Vieweg, 1888), Definizione 64]. Notre historique met en lumière quelques réalisations remarquables, mais méconnues, de Peirce dans ce domaine. Il montre aussi que ses revendications d'antériorité sont injustifiées, quoique compréhensibles si l'on pense à son désir de voir reconnus ses travaux de pionniers sur les fondements de l'arithmétique. © 1985 Academic Press, Inc.

Ausgehend von dem von Peirce wiederholt geäußerten Prioritätsanspruch auf die Dedekindsche Definition einer endlichen Menge [R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Braunschweig: Vieweg, 1888), Definizione 64], wird die Geschichte der von Peirce gegebenen Definition und ihre Rolle in seinen Forschungen über die Grundlagen der Arithmetik untersucht. Dabei treten einige bemerkenswerte und vernachlässigte Leistungen Peirces auf diesem Gebiet zutage. Auch zeigt sich, daß seine Prioritätsansprüche unberechtigt, wohl aber verständlich sind in Anbetracht seiner bahnbrechenden Arbeiten über die Grundlagen der Arithmetik. © 1985 Academic Press, Inc.

1. IL PROBLEMA

La Definizione 64 della celebre monografia di Dedekind [1888] contiene quelle che in genere sono considerate le prime definizioni di insieme infinito e di insieme finito indipendenti dalla successione dei numeri naturali. Ma a partire dal 1900, C. S. Peirce ha reclamato, in conferenze, lettere, articoli, ecc., la sua priorità sulla definizione di insieme finito [1], sostenendo di aver pubblicato per primo (in un articolo [Peirce 1881] scritto sette anni prima di [Dedekind 1888] e intitolato "On the Logic of Number") quella definizione, o per lo meno una sua formulazione identica nella sostanza a quella di Dedekind. Il peggio è che, in un paio di circostanze, Peirce informa di aver spedito a suo tempo a Dedekind una copia di [1881]; in pratica, accusa Dedekind di plagio, e anche con una certa pesantezza: "Esso [Dedekind 1888] non contiene neppure un'idea che non fosse già nel mio articolo [Peirce 1881] del quale gli avevo mandato una copia e che, non c'è dubbio, ha influenzato il suo lavoro" [Peirce 1976 III(1), 129–130]; "Dato che ho raccomandato l'opera di Dedekind [1888], dirò che essa consiste in uno sviluppo molto abile

0315-0860/85 $3.00

e originale di idee che io avevo pubblicato sei anni prima" [2] [Peirce 1976 III(1), 347]; "Leggete il suo *Was sind und was sollen die Zahlen?*, e poi leggete il mio articolo sulla logica del numero, pubblicato sei anni prima e spedito a Dedekind, e poi chiedetevi se c'è qualcosa nel primo di cui nel secondo non vi sia un'esplicita indicazione" [Peirce 1976 IV, 34].

La versione di Peirce non è mai stata messa in questione, tanto che due studiosi contemporanei, Carolyn Eisele e Joseph Dauben, possono riportarla tale e quale come la dà Peirce, senza ulteriori analisi o commenti, ma anche, ovviamente, senza la carica polemica che si percepisce nelle dichiarazioni di Peirce (cfr., ad esempio, [Eisele 1979, 160–161]; Peirce 1976 III(1), iii–iv; Dauben 1977, 127; Dauben 1982, 314]). Anzi, Carolyn Eisele mette in guardia che "bisogna usare grande cautela nel collocare l'opera di Peirce nel contesto degli sviluppi della teoria degli insiemi tra la fine dell'800 e l'inizio del'900" [Peirce 1976 III, ix], e Dauben osserva subito che "l'aspetto più interessante dell'approccio di Peirce non sta nella sua somiglianza con la ricerca condotta a quell'epoca in Europa" [1977, 127; 1982, 315].

Ma queste pur giuste cautele non bastano a soddisfare chi conosca, anche solo un poco, la personalità e l'opera di Richard Dedekind, la sua limpida onestà intellettuale. E neppure basta osservare che l'accusa di plagio è sicuramente infondata, che nel 1881 Dedekind, come dimostrano una quantità di testimonianze e documenti [3], conosceva e applicava già da anni quella definizione. Infatti, per chi, come si è detto, conosca un poco Dedekind, anche solo il fatto che nel 1881 o 1882 possa aver letto una definizione identica alla sua e nel 1888 aver pubblicato la sua definizione senza neanche menzionare quella di Peirce, appare letteralmente incredibile, persino come lapsus. L'accusa di Peirce, quindi, merita un'indagine più attenta.

2. "ON THE LOGIC OF NUMBER" (1881)

La prima sorpresa in quest'indagine, sorpresa che in un certo senso risolverebbe immediatamente ogni problema, è che in [Peirce 1881] non c'è nessuna definizione di insieme finito indipendente dalla serie numerica. Vediamo un po' più da vicino l'articolo di Peirce per chiarire come stanno le cose.

(*a*) *La struttura dell'articolo*

In questo lavoro Peirce compie un'impresa non dappoco: presenta un'assiomatizzazione dell'aritmetica, la prima pubblicata nella storia della matematica. Non è il caso qui di entrare nei dettagli di tale assiomatizzazione, né di valutare gli obiettivi e le motivazioni che spingevano Peirce a battere quella strada. Basterà dire che egli si pone da un punto di vista prettamente assiomatico, non frequente all'epoca, e caratterizza l'insieme N dei cardinali finiti come un insieme: (1) completamente ordinato da una relazione di tipo $\leq$, cioè transitiva e riflessiva; (2) che risulta, in base a quell'ordinamento, discreto e provvisto di un minimo, ma non di un massimo; e (3) per il quale vale l'induzione.

Peirce procede introducendo mediante definizioni ricorsive la somma e il prodotto tra cardinali finiti, e le loro principali proprietà. Quindi, dopo aver introdotto i numeri negativi, passa a definire la nozione di *insieme finito* in questo modo: prima introduce la nozione di "conteggio finito di un insieme", che consiste nel definire una relazione biunivoca tra gli elementi di un insieme e un segmento iniziale di N; quindi chiama *finito* un insieme che ammette un conteggio finito. In altri termini, la sua definizione di insieme finito in [1881] è analoga alla definizione tradizionale, "naturale", quella di insieme contabile con un numero naturale. Nella discussione che segue indicheremo sempre tale nozione con l'abbreviazione FN.

Peirce passa poi a dimostrare il teorema fondamentale dell'aritmetica, e infine, allo scopo di illustrare la forza del sistema assiomatico che ha elaborato, Peirce dimostra la validità del "sillogismo della quantità trasposta", una forma di ragionamento su cui conviene fornire qualche chiarimento.

(*b*) *L'inferenza di De Morgan* (*I*)

Peirce si considerava, come scienziato, soprattutto un logico, e come logico, un continuatore di Boole e De Morgan. Quella che considerava una delle più alte conquiste di De Morgan era la "scoperta" di un nuovo sillogismo, che De Morgan chiamò il "sillogismo della quantità trasposta" [De Morgan 1860, 242–246], e Peirce proponeva di chiamare "l'inferenza di De Morgan" [Peirce 1976 III(1), 338]. In [1881] Peirce non spiegava perché chiudesse il lavoro con questa dimostrazione del sillogismo, ma si capisce che egli doveva considerare quella forma di ragionamento una scoperta di portata veramente eccezionale, e che quindi la dimostrazione di esso fornisse una prova sicura e decisiva per la assiomatizzazione da lui ideata [4]. A se stesso, comunque, al quale peraltro non lesinava riconoscimenti, egli ha sempre attribuito il merito di aver osservato per la prima volta nel 1881 che si può dimostrare la validità dell'inferenza di De Morgan purché si assuma che l'insieme di cui si parla nelle premesse del sillogismo è finito [Peirce 1976 III(1), 338].

Nel passo in questione, cioè l'ultimo capoverso di [1881], Peirce presenta l'inferenza di De Morgan nella forma seguente:

Ogni Texano uccide un Texano,
Nessuno viene ucciso da più di una persona,
Dunque, ogni Texano è ucciso da un Texano,

e dimostra che, *se* l'insieme dei Texani è *finito* (nel senso definito precedentemente nel corso del suo articolo, cioè come FN) *allora* dalle due premesse segue la conclusione. Espresso in simboli, il sillogismo diventa letteralmente:

$$\begin{array}{lll} (\forall x \in T)(\exists y \in T)\ Uxy & \text{(Prima premessa)} & \\ (\forall x,y,z)((Uxy \ \&\ Uzy) \rightarrow x = z) & \text{(Seconda premessa)} & (2.1) \\ (\forall x \in T)(\exists y \in T)\ Uyx & \text{(Conclusione)}, & \end{array}$$

dove T è un insieme, U una relazione binaria. Di fatto, però, nella breve dimostrazione finale Peirce mostra di considerare U non solo univoca a sinistra, ma anche a destra, cioè egli assume in realtà U biunivoca, e dunque intende la Seconda premessa così:

$$(\forall x,y,z)(((Uxy \ \& \ Uzy) \rightarrow x = z) \ \& \ ((Uxy \ \& \ Uxz) \rightarrow y = z)). \tag{2.2}$$

Scriviamo $S_{\mathrm{dm}}(A)$ per indicare che l'insieme A, *quale che sia la relazione* U, verifica l'inferenza di De Morgan con la seconda premessa intesa come in (2.2), e $S'_{\mathrm{dm}}(A)$ quando la seconda premessa sia intesa letteralmente.

Dunque, alla fine dell'articolo in questione Peirce dimostra il teorema $\mathrm{FN}(T) \rightarrow S_{\mathrm{dm}}(T)$, cioè, dato che, nel ragionamento, T è praticamente qualsiasi,

$$\mathrm{FN} \rightarrow S_{\mathrm{dm}}. \tag{2.3}$$

Qui non possiamo soffermarci sui dettagli, ma vogliamo osservare almeno che S'_{dm} è una nozione diversa da S_{dm}, e che per dimostrare il teorema $S'_{\mathrm{dm}} \rightarrow S_{\mathrm{dm}}$ è indispensabile l'assioma di scelta, così come è indispensabile per dimostrare l'inverso del teorema (2.3). Non risulta che Peirce abbia mai usato né conosciuto l'assioma di scelta, ma in questo caso non deve averne sentito la mancanza. Infatti, per quanto riguarda S'_{dm}, Peirce ha sfiorato questa nozione, ma l'ha anche stranamente ignorata; dico "stranamente" perché doveva essergli evidente che nessuna clausola esplicita né implicita escludeva che un texano uccidesse più di un texano. Quanto al teorema (2.3), è importante osservare che evidentemente qui Peirce non ha il più lontano sospetto dell'equivalenza tra FN e S_{dm}, e quindi non gli viene neppure in mente di dimostrare il teorema inverso [5].

Per comodità di confronto con la Definizione 64 di Dedekind, ricordiamo che S_{dm}, espresso in termini di funzioni, diventa subito

$$\begin{array}{lll} \varphi(T) \subseteq T & \text{(Prima premessa)} & \\ (\forall x,y)(\varphi(x) = \varphi(y) \rightarrow x = y) & \text{(Seconda premessa)} & (2.4) \\ T \subseteq \varphi(T) & \text{(Conclusione).} & \end{array}$$

(*c*) *Conclusione*

A questo punto, il quesito che ha mosso l'indagine sembrerebbe risolto. Dedekind, pur avendo letto (se lo ha letto) [Peirce 1881], non poteva riconoscere a Peirce il primato sulla Definizione 64, perché tale definizione, nel suo articolo del 1881, Peirce non la dà affatto. Al contrario, egli definisce un insieme finito secondo la nozione tradizionale, naturale, derivata da quella di cardinale finito (a parte il dettaglio non trascurabile che qui Peirce introduce per la prima volta i cardinali finiti assiomaticamente) e quindi dimostra il teorema (2.3), cioè, in sostanza, $\mathrm{FN} \rightarrow S_{\mathrm{dm}}$; ma, come si è osservato sopra, non immagina neppure la possibilità di usare S_{dm} senz'altro come una *definizione* di "finito", in luogo di FN ed equivalente ad esso. Cosa dunque avrebbe potuto riconoscergli Dedekind?

3. "ON THE ALGEBRA OF LOGIC" (1885)

Eppure, dopo aver scagionato interamente Dedekind, non possiamo lasciare l'indagine prima di aver capito come si è data questa singolarissima circostanza per cui Peirce si è convinto di aver fornito nel 1881 una definizione di "finito" identica alla definizione di Dedekind del 1888 (una convinzione così forte che si è trasmessa immutata fino ad oggi).

Per capirne la ragione, basta fare qualche altro passo nell'indagine. Innanzitutto osservando che nelle molteplici reclamazioni di Peirce, a cui si è accennato, ricorre ogni tanto una corroborazione specifica: Peirce informa che Schröder, in un articolo intitolato "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und Cantor'sche Sätze" [Schröder 1898], ha dimostrato (cosa che peraltro Peirce, e non del tutto a torto, mostra di ritenere superflua [Peirce 1976 II, 535]) che la definizione di Dedekind è equivalente alla sua definizione (fantasma!) del 1881.

Un'occhiata all'articolo di Schröder basta a chiarire il mistero. Schröder menziona davvero una definizione, data da Peirce, di insieme finito, la quale è indipendente dalla serie numerica, ma fa riferimento sempre e soltanto a un articolo pubblicato da Peirce nel 1885, "On the Algebra of Logic", e *mai* all'articolo del 1881.

(a) La struttura dell'articolo

"On the Algebra of Logic" doveva essere la seconda parte, ma in realtà è il rifacimento completo, di un lavoro comparso con lo stesso titolo 5 anni prima, sempre sull'*American Journal of Mathematics*. Esso contiene il primo tentativo organico di Peirce di "sviluppare un'algebra adeguata al trattamento di tutti i problemi della logica deduttiva" [Peirce 1885, 183]. Anche qui, le motivazioni che spingono Peirce a questa ricerca sono assai interessanti, ma non possiamo soffermarci su di esse. Né potremo occuparci di sottolineare sistematicamente i ricchi contributi propriamente logici che Peirce presenta in questo lavoro (ad esempio, l'introduzione e l'uso della nozione di forma prenessa. Per tutte le questioni del genere, si veda [Thibaud 1975]). Qui basta ricordare che il lavoro è diviso in quattro parti. La prima è introduttiva; nella seconda parte Peirce traduce l'algebra di Boole in un'algebra degli enunciati, introduce i connettivi verofunzionali e, usando solo l'implicazione e la negazione, fornisce un sistema di assiomi (o "icone", *icons*) la cui trasformazione algebrica produce teoremi del calcolo proposizionale; nella terza parte Peirce introduce i predicati a un posto e a più posti (i "relativi"), i quantificatori, e fornisce una lista di regole di manipolazione della "parte non booleana" delle formule per spostare tutti i quantificatori all'inizio, in modo da poter poi operare sulla "parte booleana", sia con nuovi procedimenti (manipolazione delle variabili, ecc.), sia con quelli già esposti nella seconda parte; nella quarta parte Peirce introduce dei "segni" (*tokens*) di "seconda intenzione" (cioè, costanti predicative), e in particolare l'uguaglianza e l'appartenenza, che indica, rispettivamente, con 1 e con q; mostra come 1 possa esser definito mediante q (principio degli indiscernibili) e quindi fornisce nuove "icone" corrispondenti ad alcuni assiomi elementari della teoria degli insiemi (esistenza della somma, del prodotto, del complemento e dell'insieme unità). Infine Peirce definisce la relazione di equivalenza numerica tra classi (del tutto indipendentemente da Frege e da Cantor) grazie all'introduzione di un altro segno, r (Peirce scrive $r_{i\alpha j}$ per l'asserzione "i sta nella relazione α con j"), e definendo il predicato c come il predicato che asserisce la biunivocità di una relazione a due posti.

(*b*) *L'inferenza di De Morgan* (*II*)

Anche qui Peirce, a coronamento di un lavoro estremamente nuovo, originale e impegnativo, si propone di evidenziarne la potenza e la correttezza dimostrando nel sistema da lui costruito il sillogismo della quantità trasposta, naturalmente con l'aggiunta della premessa mancante. Al contrario che in [1881], qui Peirce è esplicito nel dire che la dimostrazione finale del "sillogismo" ha lo scopo di fornire un test per la teoria da lui proposta, un test che a lui pare ottimo, dato che l'inferenza scoperta da De Morgan, "uno dei migliori logici di tutti i tempi", è addirittura "un nuovo tipo di inferenza" [Peirce 1885, 201].

Per formalizzare l'inferenza, Peirce qui parte da un esempio diverso da quello usato in [1881] (De Morgan aveva dato 64 forme del sillogismo [De Morgan 1860, 244]), ed è il seguente [Peirce 1885, 201]:

Qualche X è Y,
Per ogni X esiste qualcosa che non è né Y né Z;
Dunque, qualcosa non è né X né Z.

Lo stesso Peirce traduce il sillogismo formalmente così:

$$\begin{array}{lll} (\exists x)(x \in X \ \& \ x \in Y) & \text{(Prima premessa)} & \\ (\exists R \in BI)(\forall x)(x \in X \rightarrow (\exists y)(Rxy \ \& \ y \notin Y \ \& \ y \notin Z)) & \text{(Seconda premessa)} & (3.1) \\ (\exists x)(x \notin X \ \& \ x \notin Z) & \text{(Conclusione),} & \end{array}$$

dove $R \in BI$ significa che R è biunivoca. Scriveremo $S^0_{\mathrm{dm}}(X)$ per indicare che le due premesse implicano la conclusione *quali che siano* Y e Z. Peirce, però, osserva che dalle due premesse nulla segue se non si aggiunge una terza premessa, che asserisce che l'insieme X è finito; per dimostrarlo egli presenta un controesempio, cioè indica un determinato insieme X infinito naturale (l'insieme dei numeri dispari), e due determinate proprietà Y e Z tali che per X non vale il sillogismo; cioè dimostra

$$(\exists X)(\neg \mathrm{FN}(X) \ \& \ \neg S^0_{\mathrm{dm}}(X)). \tag{3.2}$$

Ora, se vuole dimostrare la validità di S^0_{dm} nel suo nuovo sistema, Peirce deve esprimere formalmente la terza premessa, quella mancante, è cioè che X è finito. Ma nel suo sistema Peirce non ha introdotto i numeri naturali, quindi per procedere è costretto a inventarsi una definizione di "finito" esprimibile con gli strumenti che ha, cioè *indipendente dalla serie numerica*. Egli lo fa senza difficoltà, e così ha origine la sua definizione di insieme finito di cui Schröder nel 1898 dimostra l'equivalenza con la Definizione 64 di (Dedekind 1888].

Prima di passare a esporre la definizione di Peirce (che indicheremo con la sigla FP) osserviamo che la formulazione S^0_{dm} è in realtà inutilmente complicata dall'insieme Z. Essa può essere semplificata così:

$$\begin{array}{lll} (\exists x)(x \in X \ \& \ x \in Y) & \text{(Prima premessa)} & \\ (\exists R \in BI)(\forall x)(x \in X \rightarrow (\exists y)(Rxy \ \& \ y \notin Y)) & \text{(Seconda premessa)} & (3.3) \\ (\exists x) \ x \notin X & \text{(Conclusione).} & \end{array}$$

Allora la Prima premessa asserisce che X e Y hanno qualche elemento in comune, e la Seconda che esiste un'applicazione (relazione) biunivoca φ di X su un insieme $\varphi(X)$ disgiunto da Y, e quindi, per la Prima premessa, diverso da X; ora, se $X \neq \varphi(X)$, allora *o* $\varphi(X) \subset X$, *oppure* c'è un elemento di $\varphi(X)$ che non è in X (ovvero: esiste almeno un elemento all'esterno di X), *ma non entrambi*; quindi la Conclusione, asserendo il secondo caso (esiste un elemento fuori di X), *esclude* il primo, cioè esclude $\varphi(X) \subset X$. In effetti, è possibile dimostrare facilmente

$$S_{\mathrm{dm}} \leftrightarrow S^0_{\mathrm{dm}}. \tag{3.4}$$

Si osserverà ancora che, nella Seconda premessa, Peirce interpreta senz'altro $\forall\exists$ in senso molto forte, come individuanti una funzione di scelta φ *biunivoca*.

(*c*) *La definizione di insieme finito*

Riportiamo qui il brano di [1885] in cui è fornita la definizione in questione:

> Ora, dire che un insieme [*lot*] di oggetti è finito equivale a dire che, se attraversiamo la classe passando da un oggetto a un altro, finiremo necessariamente per tornare su uno degli individui già passati; cioè, se ogni oggetto dell'insieme è in una relazione biunivoca con un qualche oggetto dell'insieme, allora, con qualsiasi elemento dell'insieme ce n'è uno che è nella medesima relazione. Questo si scrive così [segue una formula che esprime la proprietà nel linguaggio introdotto da Peirce nel corso dell'articolo].

Come si vede, Peirce è molto rapido e sintetico, ma anche molto intuitivo. Non cerca di elaborare l'idea e di presentarne solo l'esito astratto, cioè la formula. In questo è veramente agli antipodi di Dedekind. In effetti, qui Peirce dà tre formulazioni della definizione di "X è finito", nelle quali va (1) dall'idea intuitiva, (2) alla formulazione di essa in termini di relazioni, (3) alla formula scritta nel suo linguaggio algebrico–logico.

(1) L'idea intuitiva è che, se un insieme A è finito, allora, se ho un qualsiasi metodo per passare da ciascun elemento dell'insieme a un altro, finirò sempre per produrre un circolo, cioè, partendo da un qualsiasi $a_1 \epsilon A$ e usando il metodo, arriverò a un $a_n \epsilon A$ tale che $a_n = a_1$. O, alternativamente, qualsiasi elemento $a \epsilon A$ io prenda, c'è sempre un elemento a' di A tale che il mio metodo mi fa passare da a' a a. E' evidente che per un insieme infinito come, poniamo, N ciò è falso: basta scegliere come metodo di passaggio da un elemento all'altro il passaggio al successore; non otterremo mai una struttura circolare, perché non torneremo mai sui nostri passi. Alternativamente, si può indicare un elemento di N, cioè 1, per cui non esiste alcun elemento n di N tale che il mio metodo mi fa passare da n a 1, cioè tale che $n' = 1$.

(2) In termini di relazioni, basta equiparare il "metodo di passaggio" con una relazione biunivoca R definita su tutto A e con codominio in A [6]. Pertanto dire che A è finito equivale a dire che, se è data una qualsiasi relazione biunivoca R che a ogni elemento di A faccia corrispondere un elemento di A, allora ogni elemento di A ha un "predecessore", ovverosia, esiste un altro elemento di A che è con esso nella relazione R.

(3) La formula logico–algebrica di Peirce, espressa con un simbolismo più consueto e con la logica, diventa

$$(\forall R\epsilon BI)((\forall x\epsilon A)(\exists y\epsilon A)Rxy \rightarrow (\forall x\epsilon A)(\exists y\epsilon A)Ryx), \tag{3.5}$$

che esprime esattamente la formulazione dell'idea di Peirce in termini di relazioni.

Tradotto in termini di funzioni, (3.5) diventa

$$(\forall\varphi\epsilon BI)(\varphi(A) \subseteq A \rightarrow A \subseteq \varphi(A)). \tag{3.6}$$

In pochi passaggi, infine, Peirce dimostra nel suo sistema il teorema

$$(\forall A)(\mathrm{FP}(A) \rightarrow S^0_{\mathrm{dm}}(A)). \tag{3.7}$$

Ora, dalla formulazione (3.5) si vede subito che FP non è altro che S_{dm} (2.1), ma dato che la formula che esprime S^0_{dm} è diversa da S_{dm} e quindi da FP, il teorema (3.7) non sembrò a Peirce immediatamente banale.

Il fatto che Peirce, quando gli si presenta la necessità specifica di farlo, tiri fuori senza difficoltà una definizione di insieme finito indipendente dalla nozione di cardinale (o ordinale) finito, dà la misura della sua bizzarra genialità: bizzarra, perché l'occasione è in realtà così insignificante come quella di dimostrare l'inferenza di De Morgan; genialità, perché nel 1882 lo stesso Cantor dichiarava di non ritenere possibile una definizione semplice di "infinito", e quindi di "finito" (si veda più avanti, p. 214).

(d) I rapporti tra FP e S_{dm}

Veramente si stenta a credere che Peirce non si fosse accorto dell'identità di FP con S_{dm}, ma è una considerazione a cui non si può non giungere. Evidentemente, infatti, Peirce considerava noto e accertato che tutti gli esempi del sillogismo della quantità trasposta forniti da De Morgan fossero equivalenti, fossero esempi della *medesima* inferenza, e quindi senza alcun dubbio stimava S_{dm} e S^0_{dm} come due forme dello stesso ragionamento. Ora, se avesse avuto presente l'identità di S_{dm} con FP, come avrebbe potuto introdurre FP e S^0_{dm} come due nozioni del tutto indipendenti l'una dall'altra? E come avrebbe potuto considerare la dimostrazione del teorema (3.7) come un banco di prova significativo del suo strumento logico?

Del resto, qui come in [1881], l'idea di usare S_{dm} come *definizione* di FN non è neppure sfiorata. Infatti, nel caso di FP, la sua adeguatezza a rappresentare FN è considerata da Peirce come un fatto scontato, che non richiede ulteriori dimostrazioni; dopo aver introdotto FP come si è detto sopra, egli non prospetta nemmeno la necessità di dimostrare FP $\leftrightarrow$ FN, ma procede come se ciò fosse senz'altro accertato [7]. Ora, se avesse avuto un pur minimo sospetto della possibilità di considerare il sillogismo di De Morgan, nella sua forma S^0_{dm} o S_{dm}, come una caratterizzazione adeguata di FN, Peirce poteva procedere in due modi: (1) come nel caso di FP, considerare perfettamente ovvio e indubbio che S^0_{dm} esprime FN; oppure, (2) dimostrare FN $\leftrightarrow S^0_{\mathrm{dm}}$. E invece Peirce non fa né l'una cosa né l'altra. Egli presenta FP $\rightarrow S^0_{\mathrm{dm}}$ (ciò che per lui è lo stesso che FN $\rightarrow S^0_{\mathrm{dm}}$) come un teorema estremamente interessante (3.7), e mostra che per un X infinito-naturale opportuno S^0_{dm} non vale (3.2), ma non accenna neppure all'opportunità di dimostrare $S^0_{dm} \rightarrow$ FP, cioè che *comunque* si scelga X, se X è infinito-Peirce (o infinito-naturale) allora non vale $S^0_{dm}(X)$, ovverosia che, per *qualsiasi* insieme X infinito il sillogismo di De Morgan è falso. Come si vedrà più avanti, dovranno passare ancora diversi anni prima che Peirce cominci a considerare la possibilità di usare S_{dm} come una caratterizzazione di insieme finito.

4 "PROOF OF THE FUNDAMENTAL PROPOSITION OF ARITHMETIC"

Il problema di come Peirce abbia potuto asserire con convinzione di aver dato nel 1881 una *definizione* di finito indipendente dai cardinali finiti sembra dunque ridursi a un banale lapsus: Peirce ha confuso il suo articolo [1881] con [1885]. Certo un lapsus simile sbalordisce, perché implica che Peirce, prima di accusare Dedekind di plagio, non sia andato a ridare neanche un'occhiata ai suoi vecchi articoli, né a controllare minimamente se davvero in [Dedekind 1888] non c'era nulla di cui in [Peirce 1881] "non vi sia un'esplicita indicazione". Ma oltre a questa considerazione, c'è un altro elemento che tende a escludere l'ipotesi del lapsus.

Come si è osservato sopra, è impensabile che Peirce nel 1885 considerasse identici FP e S_{dm} (salvo a considerare l'intero finale di [1885] come una messa in scena), né ha il sospetto che S_{dm} possa costituire una definizione di finito. Inoltre, sembra che Peirce non si renda nemmeno conto del significato che potrebbe avere una definizione di "insieme finito" del tipo di FP, che non ne capisca né l'importanza né le possibili applicazioni nella teoria degli insiemi e nell'aritmetica. La definizione di FP non fu scoperta da Peirce nel corso delle sue ricerche sui fondamenti dell'aritmetica, e quando egli la formula in [1885] non pensa affatto a questo tipo di applicazione: è un collegamento che gli sfugge del tutto, tanto è vero che, mentre ha mandato il suo articolo del 1881 a Dedekind, non gli viene neppure in mente di comunicargli la sua scoperta di FP.

Tuttavia, nel 1900, quando all'incirca cominciano le rivendicazioni di Peirce, troviamo un panorama del tutto diverso; Peirce ha ormai del tutto chiaro che S_{dm} è una definizione di finito (si veda, per esempio, [Peirce 1931 IV, 155–156]), quindi ha compreso anche che FP e S_{dm} sono la stessa cosa, ed è perfettamente consapevole dell'importanza di tale definizione nella teoria degli insiemi e nei fondamenti dell'aritmetica. Insomma, quando, nel 1900, Peirce parla della *sua* definizione di "finito" fornita in [1881], non confonde questo articolo con quello del 1885, non vuole alludere a FP, ma parla proprio di S_{dm}, del "sillogismo della quantità trasposta" come lui lo ha introdotto in [1881].

Ma allora si pone ancora una volta il problema: come è arrivato Peirce a immaginare che qualcuno potesse leggere la sua introduzione di S_{dm} in [1881] come una *definizione* di insieme finito?

(a) *Il Foglio 47*

Prima di rispondere a questa domanda, è interessante notare che è possibile ricostruire una parte della storia dell'evoluzione che hanno avuto in Peirce queste nozioni. Abbiamo infatti la traccia della prima volta (molto verosimilmente) in cui Peirce ha usato coscientemente S_{dm} come una definizione di finito e soprattutto ha applicato questa definizione all'aritmetica, collegandola con la sua assiomatizzazione del 1881.

Questa testimonianza è contenuta nel Foglio 47 degli inediti di Peirce, pubblicato per la prima volta in [Peirce 1976 I, 230–231], datato da Robin [1967] al 1890 circa, e recante il titolo (di pugno di Peirce): "Proof of the Fundamental Proposition of Arithmetic". Qui Peirce definisce esplicitamente "A è finito" mediante S_{dm}, e applica questa definizione per fornire una dimostrazione (diversa da quella del 1881) del teorema fondamentale dell'aritmetica. Egli procede prima di tutto dimostrando il seguente lemma: se esiste un'applicazione biunivoca di un insieme A su un ordinale finito, allora vale $S_{\text{dm}}(A)$; in altri termini, dimostra

$$\text{FN} \rightarrow S_{\text{dm}}. \tag{4.1}$$

A questo scopo egli usa una forma dell'induzione (che lui chiama "inferenza fermatiana"). Quindi, con una semplice applicazione del lemma dimostra il teorema fondamentale, cioè che ogni numerazione di un insieme finito-naturale impiega il medesimo ordinale finito.

Il capoverso finale merita di esser trascritto testualmente:

> Faccio osservare che ho scritto questa dimostrazione per intero senza farmela a mente; infatti i princìpi della logica mi hanno indicato che era necessario l'uso di un "sillogismo della quantità trasposta", e che a questo scopo era indispensabile il lemma; e inoltre che questo lemma poteva esser dimostrato soltanto mediante l'inferenza fermatiana. Ovviamente, questa proposizione [il teorema] ha solo un interesse logico.

Dalle parole di Peirce apprendiamo dunque che in questo foglio egli scrive *per la prima volta* la sua dimostrazione; infatti, egli ci informa che non l'aveva prima costruita mentalmente; cioè l'ha fatta direttamente per iscritto, guidato nella strategia da considerazioni puramente logiche. E apprendiamo anche che egli qui usa *consapevolmente* S_{dm} come una definizione di insieme finito. Il fatto che egli attribuisca al teorema un interesse meramente "logico" va interpretato come un'allusione al fatto che la sua nuova dimostrazione forse non dice nulla di nuovo al matematico, ma tuttavia è, secondo Peirce, illuminante per il logico che si interessa dei fondamenti dell'aritmetica. Qui insomma Peirce stabilisce infine, e, molto verosimilmente, per la prima volta, la definizione di insieme finito mediante S_{dm} e, sempre per la prima volta, la collega e applica allo studio assiomatico dell'aritmetica iniziato in [1881]. E' certamente *dopo* aver scritto questo foglio che Peirce annoterà su una sua copia di [1881], a margine della lunga dimostrazione (per induzione) del teorema fondamentale dell'aritmetica, le parole: "Questa lunga dimostrazione non è affatto necessaria. Tutta la cosa non dipende dal modo di ragionamento di Fermat, ma da quello di De Morgan" [Peirce 1931 III, 168].

Ora riprendiamo il nostro interrogativo su Peirce e vediamo a che punto siamo. L'idea del lapsus sembra sicuramente da scartare. Quando nelle sue rivendicazioni Peirce parla della sua definizione di insieme finito del 1881, egli allude proprio a S_{dm}, non c'è errore. Forse per lui la sua formulazione della proprietà S_{dm} e la sua dimostrazione che un insieme finito ha quella proprietà "ammontano" in qualche modo a una definizione? Prima di concludere che Peirce potesse ingannare se stesso a tal punto è opportuno esplorare un'altra possibilità, che ci viene suggerita dal confronto con altri autori europei a lui contemporanei, tra cui Cantor (v. più avanti, p. 214); essi, di fronte alla definizione 64 di Dedekind, pensavano, o dicevano (e alcuni anche scrivevano): "Ma io l'ho sempre conosciuta!" Forse, come costoro, Peirce ha pensato che il *vero* atto creativo fosse quello di individuare e formulare S_{dm} come proprietà degli insiemi finiti, e che il fatto poi di passarla al rango di definizione fosse una questione accessoria, "facile". E invece la verità è esattamente l'opposto: proprietà come S_{dm} erano note da secoli, ma nessuno aveva mai pensato a usarle come *assiomi*.

5. LA DEFINIZIONE 64 DI DEDEKIND

Che certi insiemi infiniti possano essere applicati biunivocamente su un loro sottoinsieme proprio è una proprietà (che, per comodità, chiamiamo qui "proprietà paradossale") già osservata nell'antichità da Plutarco e da Proclo [Steele 1950, 24], e che è stata scoperta e riscoperta più volte nella storia della matematica. Galilei [1638, 44–45] la evidenzia per dimostrare che la logica che vale nel finito non è applicabile nel dominio dell'infinito. Essa è usata da Bolzano [1851, §20], e da Cantor [1877, 119–133]. Ed è appunto la proprietà paradossale che Dedekind utilizza nella sua definizione di insieme infinito e di insieme finito (che indichiamo, rispettivamente, con ID e FD):

$$\mathrm{ID}(A) \underset{\mathrm{df}}{=} (\exists\varphi\epsilon BI)\varphi(A) \subset A, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{FD}(A) \underset{\mathrm{df}}{=} \neg\,\mathrm{ID}(A), \tag{5.2}$$

dove, al solito, BI è la classe delle biiezioni. In altri termini, un insieme è chiamato "infinito" o "finito" a seconda che possegga o non possegga la proprietà paradossale, e evidentemente FD, S_{dm} e FP sono nozioni perfettamente identiche, a meno del linguaggio usato per esprimerle. Il teorema (2.3) di [1881], cioè, non è altro che l'asserzione che un insieme finito-naturale *non ha* la proprietà paradossale; e così pure il teorema (4.1) del Foglio 47.

Espresso in questi termini, quel teorema dimostra un fatto intuitivamente del tutto ovvio a chiunque; tutt'al più poteva esser una novità l'idea di dimostrarlo. La proprietà paradossale (o la sua negazione) era stata formulata esplicitamente, e del tutto indipendentemente, dagli autori citai sopra, compreso Dedekind, e a questi vanno aggiunti, almeno, Peirce e Lüroth (v. p. 214); ciò dimostra a sufficienza che né la formulazione di tale proprietà (o della sua negazione), né l'osservazione di insiemi infiniti che la posseggono (figuriamoci poi l'asserzione che gli insiemi finiti non la posseggono) sono di per sé tanto difficili o tanto significative come sembra ritenere Peirce.

Ma il fatto di assumere la presenza o l'assenza della proprietà paradossale come una definizione, rispettivamente, di infinito e di finito, come un assioma che caratterizza *interamente* quelle nozioni, è veramente una mossa nuova, e Dedekind ne era perfettamente consapevole quando scriveva, nella sua Prefazione alla seconda edizione (del 1893) di [Dedekind 1888]: "La proprietà che ho usato come definizione dei sistemi infiniti (64) era già stata formulata, prima che il mio lavoro uscisse, da G. Cantor e anche da Bolzano. Ma nessuno dei due ha cercato di assumere questa proprietà come definizione dell'infinito"; oppure quando, rispondendo nel gennaio del 1888 a una lettera di Heinrich Weber, scrive: "Cantor mi ha fatto notare che lui aveva già sottolineato la distinzione tra il finito e l'infinito nel 1877, anche se non ha l'intenzione di reclamarne la priorità. Su questo ci sarebbe molto da dire; in un certo senso ha ragione, però nel 1882 dubitava che fosse possibile una definizione semplice, e rimase molto stupitò quando io, provocato dai suoi dubbi, gli comunicai, su sua richiesta, la mia; a volte capita di possedere qualcosa senza saperne apprezzare debitamente il valore e il significato" [Dedekind 1982, 85, 144].

Dedekind è stato certamente il primo ad avere l'idea di utilizzare la proprietà paradossale come una definizione, un assioma, e certamente il primo (e anche l'unico) a farne un'applicazione così profonda nell'aritmetica e nella teoria degli insiemi finiti. Infatti, come si è già detto, Dedekind ha scritto il primo abbozzo di *Was sind und was sollen die Zahlen?* tra il 1872 e il 1878, ed esso contiene già le definizioni 64 e le principali applicazioni, mentre è molto difficile credere che Peirce, prima del 1885, disponesse di una definizione come FP. L'unico dubbio circa la priorità di Dedekind può venire da una nota di [Schröder 1898], in cui l'autore informa che nel 1873 Lüroth gli aveva comunicato di voler usare come criterio distintivo tra finito e infinito una proprietà sostanzialmente equivalente a S_{dm}. E' vero, poi, che Peirce ha stampato per primo FP, ma ancora Schröder, con l'abituale modestia, dirime ragionevolmente ogni possibile questione tra Dedekind, Peirce e Lüroth: dopo aver ricordato che anche lui conosceva la definizione 64 sin dal 1873, perché gli era stata comunicata, appunto, da Lüroth, Schröder aggiunge: "Tuttavia, l'importante è avere *fatto* qualcosa con la definizione. Peirce, che ha formulato esattamente la definizione, in qualche modo l'ha utilizzata, come si è detto [cioè per dimostrare il teorema (3.7) dell'articolo del 1885]; ma a Dedekind resterà sempre la gloria di aver fondato su tale definizione una teoria rigorosamente conseguente e splendidamente costruita".

6. PEIRCE E DEDEKIND

Per tornare al nostro interrogativo, potrebbe darsi che, come anche Cantor, Peirce nel 1900 circa, leggendo il lavoro di Dedekind, sia rimasto colpito dal fatto che l'autore tedesco avesse usato, per la sua definizione di finito e infinito, un fatto che egli credeva di aver scoperto per primo, assieme a De Morgan, e cioè che gli insiemi finiti non hanno la proprietà paradossale, fatto da lui espresso nel teorema (2.3). Forse l'uso di quella proprietà, quindi, ha dato a Peirce la netta impressione del plagio, impressione rafforzata dal ricordo di aver spedito a Dedekind una copia del suo lavoro del 1881. Ma, come si è visto, innanzitutto la proprietà degli insiemi finiti espressa nel teorema (2.3) non era certo una novità né nel 1881 né nel 1888, e del resto Dedekind la conosceva da anni prima di leggerla (se poi l'ha letta) in [Peirce 1881]; e in secondo luogo, della vera novità, quella di assumere la proprietà come assioma, in [Peirce 1881] non c'è traccia.

Riassumendo, in base a questa supposizione l'intero episodio potrebbe esser ricostruito così:

1. Peirce pubblica il suo articolo del 1881, in cui, per saggiare la forza della sua assiomatizzazione dimostra il teorema (2.3). La proprietà S_{dm} gli pare una straordinaria scoperta di De Morgan, e altrettanto straordinaria gli pare la propria scoperta che S_{dm} vale per gli insiemi finiti.

2. Peirce spedisce una copia di [1881] a Dedekind, di cui ha letto con interesse un'edizione (probabilmente la terza) delle *Vorlesungen über Zahlentheorie* di Dirichlet [Peirce 1976 III(2), 883], e di cui giustamente intuisce l'interessamento per i fondamenti dell'aritmetica.

3. Non si sa se Dedekind abbia ricevuto e letto l'articolo di Peirce [8]. Se lo ha letto, probabilmente avrà pensato: ecco un altro che conosce la proprietà paradossale ma non la usa come assioma. In quel periodo, i problemi che gli restano da risolvere per terminare *Was sind und was sollen die Zahlen?* sono sostanzialmente la dimostrazione di esistenza delle funzioni definite per induzione, la dimostrazione di esistenza di un insieme infinito e la dimostrazione della categoricità dei suoi assiomi, tutti punti che non sono neanche sfiorati in [Peirce 1881].

4. Peirce pubblica nel 1885 la sua definizione FP, ma ancora non si rende conto delle sue applicazioni e della sua importanza.

5. Dedekind, dopo aver risolto gli ultimi problemi, pubblica nel 1888 la versione definitiva del suo volumetto sui numeri, contenente la definizione 64.

6. Dopo il 1890 Peirce, che evidentemente non ha ancora letto [Dedekind 1888], si annota su di un foglio la dimostrazione del teorema fondamentale dell'aritmetica in cui, a un decennio circa di distanza dalla sua assiomatizzazione del 1881, per la prima volta pensa ad usare S_{dm} come una definizione di "insieme finito", e la applica ai fondamenti dell'aritmetica.

7. In una data imprecisata intorno al 1900, Peirce legge [Dedekind 1888], vede che nella definizione 64 Dedekind usa un corrispettivo del suo teorema (2.3) di [1881], ricorda di aver spedito il suo articolo a Dedekind e matura l'idea di essere stato plagiato [9].

7. LE RAGIONI DI PEIRCE

La "giustificazione" che abbiamo trovato per l'atteggiamento rivendicativo di Peirce, tutto sommato, è piuttosto benevola. Se egli è davvero caduto nello stesso errore di valutazione commesso, ad esempio, da Cantor rispetto al significato della definizione di Dedekind, bisogna però rimarcare che nessuno come lui ha passato il segno. Nella sua prima presa di posizione su [Dedekind 1888], nella Lettera al Direttore di *Science* già ricordata (cfr. nota [1]), per esempio, Peirce parla senz'altro, alludendo al suo articolo del 1881, della sua "definizione di insieme finito", mostrando, peraltro, di non aver capito quella di Dedekind. E nel 1905 [Peirce 1931 IV, 268] scrive che "la sua [di Dedekind] definizione di una collezione infinita è esattamente la mia precedente definizione di una collezione finita capovolta. La sua introduzione del concetto gaussiano di *Abbild*, di cui si è parlato come cosa di grande rilievo, potrebbe esser stata ripresa dal mio articolo [quello del 1881], ma non ho voluto fare troppo il pignolo". Dopo queste sconcertanti asserzioni, Peirce inventa una polemica personale con Dedekind, prendendo senz'altro come rivolta a se stesso una precisazione che il matematico tedesco inseriva nella Prefazione alla seconda edizione (che è del 1893) di [Dedekind 1888], e nella quale Dedekind informava il lettore che (come confermano anche i suoi quaderni) il suo lavoro "sostanzialmente era già finito molti anni prima" del 1878 [Dedekind 1888, 85].

Considerando attentamente tutti quei passi di Peirce, ciò che si percepisce precisamente è che tutte le sue rivendicazioni, nell'insieme, non sono altro che un tentativo di riinserirsi in una storia da cui, a partire dal 1900, egli comincia ad accorgersi di essere stato escluso. Giustamente o ingiustamente escluso? E' solo responsabilità del carattere troppo dispersivo e poliedrico della genialità di Peirce se le sue brillanti e precoci intuizioni sulla fondazione assiomatica delle teorie matematiche e sulla teoria degli insiemi sono rimaste solo brillanti intuizioni e niente più, se, effettivamente, a posteriori, dobbiamo riconoscere che la loro influenza sulla grande corrente di pensiero assiomatico nata alla metà dell'ottocento e culminata negli anni '20 e sulla nascita della teoria degli insiemi è stata pressoché nulla? Qui sarebbe ingiusto rispondere affermativamente. In realtà Peirce, come si è già osservato, ha compiuto effettivamente almeno due exploit straordinari: ha pubblicato la prima assiomatizzazione dell'aritmetica mai comparsa, e ha pubblicato per primo una definizione insiemistica, semplice e indipendente dai numeri naturali, di insieme finito. Come mai sono rimaste lettera morta per tutti coloro che si occupavano in quegli anni di temi così affini?

La ragione è molto semplice, ed è che Peirce viveva in America, cioè, per i suoi tempi, in una lontana provincia di frontiera, ai confini estremi dell'impero matematico che aveva il suo cuore in Germania. L'unico matematico di spicco operante in America in quel periodo (cioè, negli anni '70 e '80) era Sylvester, che del resto era inglese, e forse non è un caso se proprio negli anni passati a contatto con lui alla Johns Hopkins University (1879–1884) Peirce si è impegnato a sviluppare le sue idee sull'aritmetica; ma per il resto, la matematica americana non esisteva ancora; né l'*American Journal of Mathematics*, dove appaiono [Peirce 1881] e [Peirce 1885], e fondato appunto da Sylvester nel 1878, doveva esser molto letto in Europa negli anni '80. Del resto, se Peirce acquisterà una notorietà in Europa sarà solo più tardi, per merito di Schröder, come logico [10]. Sicuramente, se Peirce fosse vissuto e avesse lavorato in Germania, i suoi contributi avrebbero avuto, oltre che un altro riconoscimento, anche un altro impatto sulla storia della matematica e della ricerca sui fondamenti. In questo senso, il suo tentativo di riaffermare un suo posto in una storia da cui di fatto era restato fatalmente escluso, il suo desiderio di riconoscimento, anche se prende la sgradevole forma della rivendicazione di priorità e dell'accusa di plagio, ha un suo significato e, oggi dobbiamo riconoscerlo, una sua profonda giustificazione.

NOTES

1. La prima volta nel 1900, in una Lettera al direttore di *Science* [Peirce 1931 III, 360–361], e poi, in ordine approssimativamente cronologico, nel 1901 [Peirce 1931 VII, 127], nel 1902 [Peirce 1976 III(2), 956; IV, 34, 55], nel 1903 [Peirce 1976 III(1), 129–130, 347; Peirce 1931 V, 110], nel 1904 [Peirce 1976 II, 535], nel 1905 [Peirce 1931 IV, 268; V, 368], nel 1908 [Peirce 1976 III(2), 883]. L'approssimazione è dovuta al carattere forzatamente congetturale della datazione di alcuni passi. Non si può escludere che nel materiale della Peirce Collection rimanga ancora qualche passo inedito rilevante per il nostro tema.

2. Per le ragioni indicate in Bibliografia, sotto [Peirce 1881]. Pierce considera sempre il suo articolo del 1881 come uscito nel 1882; di qui i "sei anni prima" in luogo di "sette".

3. Dedekind aveva comunicato la sua definizione di insieme infinito (e quindi di insieme finito) a H. Weber nel 1878. Inoltre, la prima stesura di [Dedekind 1888], che è stata sicuramente redatta tra il 1872 e il 1878, contiene quelle definizioni e le loro pricipali applicazioni. Per tutte le questioni del genere si veda [Dugac 1976, 79–98, 293–309].

4. Nel 1893 [Peirce 1931 IV, 74] Peirce scrive che la scoperta del sillogismo della quantità trasposta costituisce uno dei titoli di De Morgan a esser considerato il più grande di tutti i logici formali.

5. Certamente Peirce immagina che, se T è infinito, S_{dm} *in generale* non è applicabile, quindi non funziona come sillogismo; probabilmente ha già costruito degli insiemi infiniti T per cui esso non vale, cioé sa che $(\exists T)(\mathrm{IN}(T) \mathbin{\&} \neg S_{\mathrm{dm}}(T))$. Ma altrettanto certamente non sospetta che si possa dimostrare $(\forall T)(\mathrm{IN}(T) \rightarrow \neg S_{\mathrm{dm}}(T))$, ciò che è indispensabile per assumere legittimamente S_{dm} come definizione di insieme finito.

6. In realtà si potrebbe usare anche una relazione univoca a destra. Questo porterebbe a una definizione equivalente a S'_{dm}. Peirce stesso, però, analogamente a quanto faceva in [1881], qui interpreta, come si è visto, la relazione come senz'altro biunivoca.

7. Dedekind dimonstra con cura questa equivalenza, che da sinistra a destra richiede l'assioma di scelta [Dedekind 1888, 44].

8. Nel *Nachlass* di Dedekind non c'è traccia di scambi con Peirce. Comunicazione personale di K. Haenel, Archivleiter della Biblioteca universitaria di Göttingen.

9. Un'idea, del resto, per lui non insolita (cfr. [Eisele 1979, 160]). La vita di Peirce è costellata di polemiche per la priorità, da lui coltivate con particolare passione.

10. Nel 1901, avendo ricevuto una lettera di Peirce in cui il filosofo americano gli comunicava le proprie ricerche autonome sugli insiemi, Cantor, prima di rispondere, scrive a Philip Jourdain per informarsi se questo Peirce è quel tale di cui parla tanto Schröder [Eisele 1979, 264–265].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Bolzano, B. 1851. *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig: C. H. Reclam.

Cantor, G. 1877. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. I riferimenti di pagina sono a *Gesammelte Abhandlungen.* Berlin: Springer, 1932.

Dauben, J. W. 1977. C. S. Peirce's philosophy of infinite sets. *Mathematics Magazine* **50**(2), 123–135.

—— 1982. Peirce's place in mathematics. *Historia Mathematica* **9**, 311–325.

Dedekind, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?.* Braunschweig: Vieweg. I riferimenti di pagina sono a [Dedekind 1982].

—— 1982. *Scritti sui fondamenti della matematica.* Napoli: Bibliopolis. Contiene la traduzione italiana (tra l'altro) di [Dedekind 1888] e della lettera di Dedekind a Weber del 24 gennaio, 1888.

De Morgan, A. 1860. On the syllogism, IV, and on the logic of relations. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **10,** 331–358. I riferimenti di pagina sono alla ristampa in *On the syllogism and other logical writings*. London: Routledge & Kegan Paul, 1966.

Dugac, P. 1976. *Richard Dedekind et les fondaments des mathématiques*. Paris: Vrin.

Eisele, C. 1979. *Studies in the scientific and mathematical philosophy of Charles S. Peirce*. The Hague: Mouton.

Galilei, G. 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. I riferimenti di pagina sono all'edizione a cura di Geymonat e Carugo. Torino: Boringhieri, 1958.

Peirce, C. S. 1931. *The collected papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press, 1931–1935 (Vols. I–VI); 1958 (Vols. VII–VIII).

——— 1976. C. Eisele, ed. *The new elements of mathematics*. The Hague: Mouton.

——— 1881. On the logic of number. *American Journal of Mathematics* **4,** 85–95. Il Vol. 4, datato 1881, uscì con molto ritardo, nel 1882. Il ritardo non fu più colmato, tanto che l'anno 1883 fu saltato: il Vol. 5, infatti, è datato 1882, ma il Vol. 6 è datato 1884.

——— 1885. On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation. *American Journal of Mathematics* **7,** 180–202.

Robin, R. S. 1967. *Annotated catalogue of the papers of Charles S. Peirce*. Amherst: Univ. of Massachusetts Press.

Schröder, E. 1898. Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze. *Abhandlungen der Keiserlichen Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Nova Acta* **71**(6), 303–362.

Steele, D. A. 1950. Prefazione alla traduzione inglese di [Bolzano 1851]: *Paradoxes of the infinite*. London: Routledge & Kegan Paul.

Thibaud, P. 1975. *La logique de Charles Sanders Peirce. De l'algèbre aux graphes*. Aix-en-Provence: Editions de l'Université de Provence.